Osaka University Knowledge Archive

Title	函數ノ多葉性ニ就テ
Author(s)	尾崎, 繁雄
Citation	全国紙上数学談話会. 20 p.none-p.none
Issue Date	1934-11-20
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/73896
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

全國紙上數學談話會　第20号

59　函数ノ多葉性ニ就テ

尾崎繁雄（東京文理大）

$f(z)$ ヲ $|z|\leqq 1$ ニ於ケル正則 p 葉函数トスル。シカモ $|z|=1$ 上デ

$$\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0 \qquad \text{或ハ} \qquad 1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0$$

ガ成立スル場合ニ $f(z)$ ハ $|z|\leqq 1$ デ星型ナリ或ハ凸型ナリト呼ブコトニスル。コノ定義ハ $p=1$ ノ場合ノソレト矛盾シナイコトハ明カデアル。尚、是等ノ幾何學的意味モ明カデアロウ。

以上ノ定義ニヨッテ單葉星型函数或ハ單葉凸型函数ノ理論夫々 p 葉星型函数或ハ p 葉凸型函数ノ場合ニ拡張デキル。例ヘバ

<u>定理1</u>　$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots+a_nz^n+\cdots$ ヲ $|z|<1$ ニ於ケル有理型函数トスル。$f(z)$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉星型ナルタメノ完全條件ハ $|z|<1$ ニ於テ $\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$ ナルコトデアル。

證明. 上ノ條件ガ十分ナルコトハ明カデアル。（拙論、東京文理大紀要A2 (1934) 49頁定理9′參照）次ニ必要ナコトヲ述ベル。$|z|<1$ デ $f(z)$ ハ正則且 $\frac{f(z)}{z^p}\neq 0$ デアルカラ $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ ハ $|z|<1$ デ正則トナル。シカモ $r(<1)$ ヲ十分1ニ近クトツタ場合ニ $f(z)$ ノ星型性ヨリ $|z|=r$ ノ上デ $\Re\frac{zf'(z)}{f(z)}>0$ デアルカラ結局 $|z|<1$ デ $\Re\frac{zf'(z)}{z}>0$ トナル。

<u>定理2</u>　$f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots+a_nz^n+\cdots$ ヲ $|z|<1$ ニ於ケル有理型函数トスル。$f(z)$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉凸型ナルタメノ完全條件ハ $|z|<1$ ニ於テ $1+\Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}>0$ ナルコトデアル。

證明. $g(z)=zf'(z)$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉星型ナルタメ

ノ完全條件ヲ求ムレバヨシ。即チ定理1ヨリ上式ヲ得ル。

以上ノ二定理ハ $p=1$ ノ場合ハ已ニ小堀氏ニヨリ証明サレテヰルノデアルガ唯 $f(z)$ ニツイテノ假定ヲ幾分一般的ニシテアル。

扨 $\varphi(z)=z^{p}+c_1 z^{k+p}+\cdots+c_n z^{nk+p}+\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉星型ナル場合ニハ

$$f(\zeta)=[\varphi(z)]^{\frac{k}{p}}=\zeta+d_2\zeta^{2}+\cdots+d_n\zeta^{n}+\cdots \quad (\text{但 } \zeta=z^{k})$$

ハ $|\zeta|<1$ デ正則且単葉星型トナル。コノコトハ

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\frac{z\varphi'(z)}{p\varphi(z)}$$

ヨリ容易ニワカルコトデアル。

コノ性質ヲ利用シテ次ノ結果ガ得ラレル。

<u>定理3</u>　$\varphi(z)=z^{p}+c_1 z^{k+p}+\cdots+c_n z^{nk+p}+\cdots$ ガ $|z|<1$ ノ正則且 p 葉星型ナル場合ニハ $|c_n|\leqq\binom{\frac{2p}{k}+n-1}{n}$ $(n=1,2,\ \ )$ ナリ

等号ハ $\varphi_0(z)=\dfrac{z^{p}}{(1-z^{k})^{\frac{2p}{k}}}$ ノ際起ル。

<u>定理4</u>　$\varphi(z)=z^{p}+c_1 z^{k+p}+\cdots+c_n z^{nk+p}+\cdots$ ガ $|z|<1$ デ正則且 p 葉凸型ナル場合ニハ $|c_n|\leqq\frac{p}{nk+p}\binom{\frac{2p}{k}+n-1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ ナリ

等号ハ $\phi_0(z)=\displaystyle\int_0^{z}\frac{z^{p-1}}{(1-z^{k})^{\frac{2p}{k}}}\,dz$ ノ際起ル。

特ニ $p=1$ ノ場合ハ Golusin 及ビ能代氏ニ依テ証明サレテ居リ、上ノ証明モ亦能代氏ノソレニ倣ツテ行フコトガ出来ル。(能代氏 北海道帝大紀要 2 (1934), 131頁参照)

其他定理3或ハ4ノ假定ノ下ニ $\varphi(z)$ ノ Polynomial section ノ星型半径, 凸型半径ヲ決定スル理論等モ全ク類似ニ進ミ得ルデアロウ。

(11月20日受取)